به نام خدا

جلسه ۳ ریاضی عمومی ۱

مدرس : جابر عامری

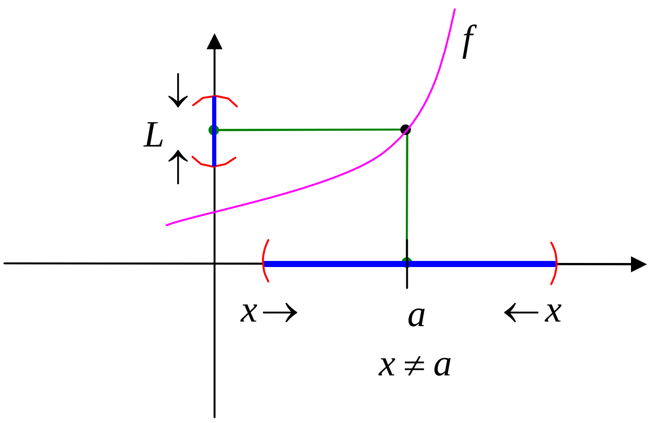
آموزشکده های فنی خوزستان

موضوع : حد و پیوستگی

***

مفهوم شهودی حد تابع در یک نقطه

اگر تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی a (بجز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. در این صورت وقتی متغیر x از دو طرف محور طول ها به سمت عدد a میل کند و مقدار $f(x)$ نزدیک به عدد L شود، گویند حد تابع f در $x=a$ برابر L است و می نویسند.



$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

مثال : در تابع $f(x) = x^{۲} + ۱$ اگر متغیر x از دو طرف به عدد ۳ نزدیک شود. آنگاه مقادیر تابع به عدد ۱۰ نزدیک می شوند. در این صورت $\lim_{x \to ۳} f(x) = ۱۰$. به جدول و نمودار زیر توجه کنید.

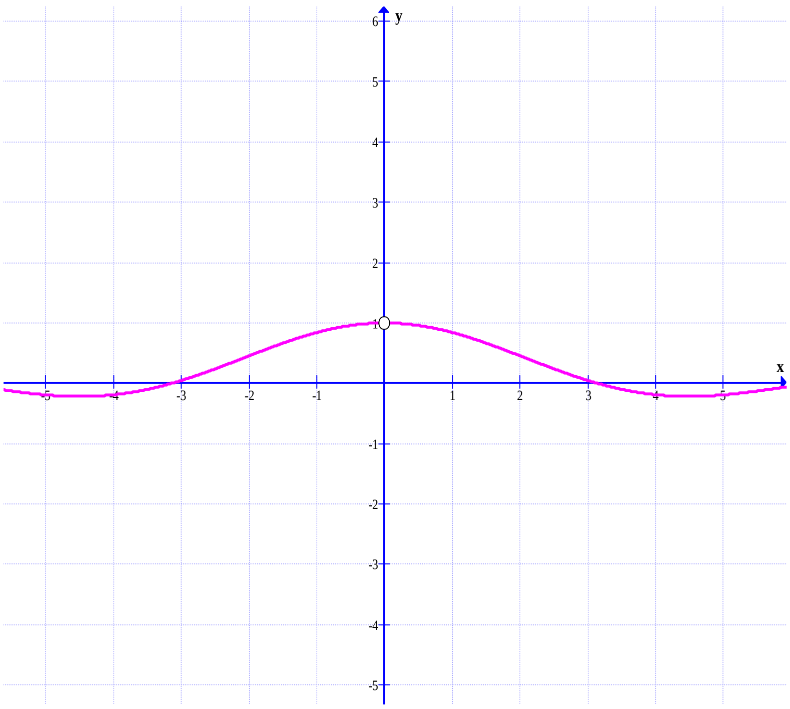
جدول

x	۲	۲/۵	۲/۷۵	۲/۹	۲/۹۹	۳	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲۵	۳/۵	۴
$f(x)$	۵	۷/۲۵	۸/۵۶۲۵	۹/۴۱	۹/۹۴۰۱	۱۰	۱۰/۰۶۰۱	۱۰/۶۱	۱۱/۵۶۲۵	۱۳/۲۵	۱۷

$$\lim_{x \to ۳} f(x) = ۱۰$$

مثال : در شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ رسم شده است. با توجه به این شکل حد مقابل را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\sin x}{x} =$$

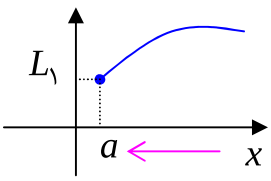


توجه : حد تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ وقتی که x به سمت صفر میل کند، برابر یک است.

❋❋❋

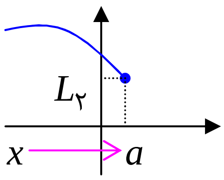
حد راست و حد چپ (حد های یک طرفه)

اگر متغیر x فقط از یک طرف محور طول ها به سمت عدد a میل کند. با مفهوم حد های یک طرفه سر وکار داریم.



حد راست : اگر تابع f در همسایگی راست نقطه‌ی a تعریف شده باشد. وقتی متغیر x فقط از طرف راست محور طول ها به سمت عدد a میل کند و مقدار $f(x)$ نزدیک به عدد $L_{۱}$ شود، گویند حد راست تابع f در $x=a$ برابر $L_{۱}$ است و می نویسند.

$$\lim_{x\to a^{+}} f(x)=L_{۱}$$



حد چپ : اگر تابع f در همسایگی چپ نقطه‌ی a تعریف شده باشد. وقتی متغیر x فقط از طرف چپ محور طول ها به سمت عدد a میل کند و مقدار $f(x)$ نزدیک به عدد $L_{۲}$ شود، گویند حد چپ تابع f در $x=a$ برابر $L_{۲}$ است و می نویسند.

$$\lim_{x\to a^{-}} f(x)=L_{۲}$$

مثال : حد راست تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۲$ به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۲ \\ -x & x<۲ \end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۲^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۲^{+}} x+۱=۲+۱=۳$$

مثال : حد چپ تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۲$ به دست آورید.

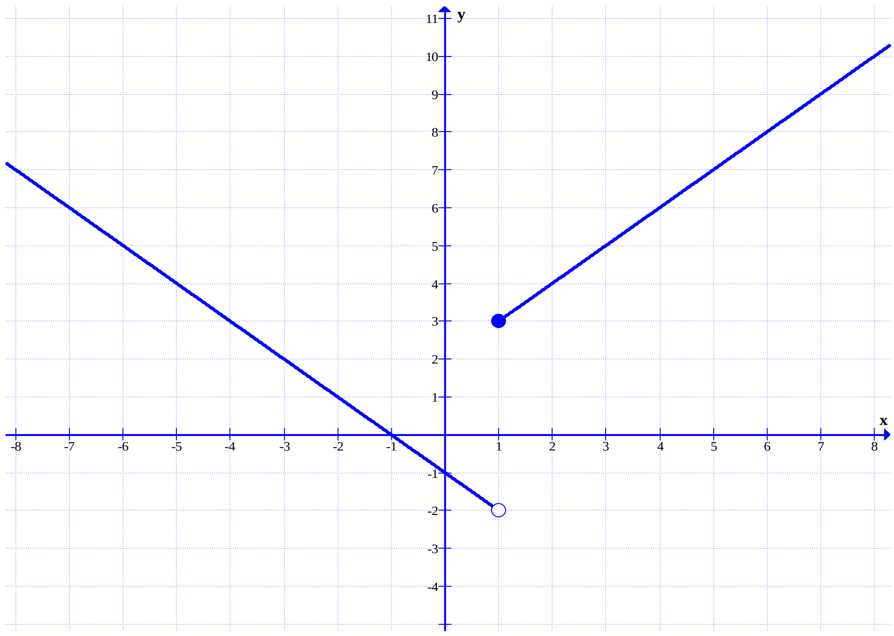
$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & x\geq ۲ \\ -x & x<۲ \end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} -x=-۲$$

مثال : با توجه به شکل زیر مطلوب است محاسبه‌ی

الف) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ ب) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$ ج) $f(۱)$

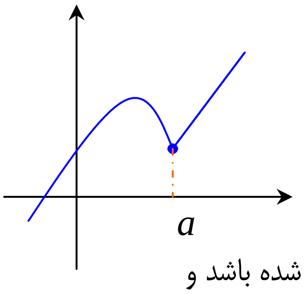


حل :

الف) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۳$ ب) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=-۲$ ج) $f(۱)=۳$

❋❋❋

شرط وجود حد یک تابع در یک نقطه



گویند تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ دارای حد است، هرگاه

الف : در همسایگی راست و چپ نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد.

ب : در این نقطه، حد راست و چپ آن عدد های مساوی شوند.

به عبارتی دیگر، اگر تابع f در همسایگی راست و چپ نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد و

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L_۱ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a^-} f(x)=L_۲$$

در این صورت، اگر $L_۱=L_۲=L$ آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و بر عکس

مثال: حد راست و حد چپ و مقدار تابع زیر را در نقطه‌ی $x=۲$ بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & x\geq ۲ \\ x^۲ & x<۲ \end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(۳x-۱)=۳(۲)-۱=۵$

حد چپ $\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x^۲)=(۲)^۲=۴$

مقدار $f(۲)=۳(۲)-۱=۵$

تمرین۱ : نشان دهید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۳$ دارای حد است.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۲x & x\geq ۳ \\ ۵x & x<۳ \end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+}(x^۲+۲x)=(۳)^۲+۲(۳)=۱۵$

حد چپ $\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-}(۵x)=۵(۳)=۱۵$

و چون $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۳^+} f(x) = ۱۵$ پس تابع در نقطه‌ی $x = ۳$ دارای حد است و

$$\lim_{x\to ۳} f(x) = ۱۵$$

***

معرفی نماد :

جزء صحیح یک عدد حقیقی مانند x که با نماد $[x]$ نمایش داده می شود ، به صورت زیر تعریف می شود.

اگر x عدد صحیح باشد. $[x]$ با خود x برابر است.

مثلاً : $[۵] = ۵$

اگر x عدد صحیح نباشد. $[x]$ با بزرگترین عدد صحیح قبل از x برابر است.

مثلاً : $[۲/۷] = ۲$ و $[-۳/۵] = -۴$

تمرین۲ : نشان دهید که تابع $f(x) = ۳ + [x]$ در نقطه‌ی $x = ۲$ حد ندارد.

حل :

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} (۳ + [x]) = ۳ + [۲^+] = ۳ + ۲ = ۵$$ حد راست

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} (۳ + [x]) = ۳ + [۲^-] = ۳ + ۱ = ۴$$ حد چپ

و چون $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ پس تابع در نقطه‌ی $x = ۲$ دارای حد نیست.

تمرین۳ : تابعی مانند f مثال بزنید که در $x = ۱$ حد نداشته باشد، امّا $|f|$ در $x = ۱$ حد داشته باشد.

حل : قرار می دهیم.

$$f(x) = \begin{cases} ۲ & x \geq ۱ \\ -۲ & x < ۱ \end{cases} \to |f(x)| = \begin{cases} ۲ & x \geq ۱ \\ ۲ & x < ۱ \end{cases} \to |f(x)| = ۲$$

در این صورت $\lim\limits_{x\to ۱} |f(x)| = ۲$ در حالی که دو تابع f در نقطه‌ی $x = ۱$ حد ندارد. (چرا؟)

تمرین۴ : مقدار a را چنان پیدا کنید که تابع زیر در نقطه‌ی $x=۳$ حد داشته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+x-۱ & x<۳ \\ -۳x+۲ & x\geq ۳ \end{cases}$$

حل : کافی است حد راست و حد چپ این تابع را در نقطه‌ی $x=۳$ محاسبه کرده و برابر هم قرار دهیم.

$$\lim_{x\to ۳^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۳^{+}}(-۳x+۲)=-۳(۳)+۲=-۷$$ حد راست

$$\lim_{x\to ۳^{-}} f(x)=\lim_{x\to ۳^{-}}(ax^{۲}+x-۱)=a(۳)^{۲}+(۳)-۱=۹a+۲$$ حد چپ

$$\Rightarrow ۹a+۲=-۷\rightarrow ۹a=-۹\rightarrow a=-۱$$

تمرین۵ : مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x)=a[x]+[x+۱]$ در نقطه‌ی $x=۱$ حد داشته باشد.

حل:

$$f(x)=a[x]+[x+۱]=a[x]+[x]+۱=(a+۱)[x]+۱$$

$$\lim_{x\to ۱^{+}} f(x)=\lim_{x\to ۱^{+}}[(a+۱)[x]+۱]=(a+۱)[۱^{+}]+۱=a+۲$$ حد راست

$$\lim_{x\to ۱^{-}} f(x)=\lim_{x\to ۱^{-}}[(a+۱)[x]+۱]=(a+۱)[۱^{-}]+۱=۱$$ حد چپ

$$f(۱)=(a+۱)[۱]+۱=a+۲$$ مقدار

$$a+۲=۱\Rightarrow a=-۱$$

توجه : ثابت می شود که حد هر تابع در صورت وجود یکتا است.

❋❋❋

پایان