به نام خدا

جلسه ۴ ریاضی عمومی ۱

مدرس : جابر عامری

آموزشکده های فنی خوزستان

موضوع : حد و پیوستگی

***

محاسبه‌ی حد

گاهی لازم است حد تابع را در یک نقطه به طور مستقیم ، محاسبه کنیم. روش رایج جایگزینی مستقیم در معادله‌ی تابع است. به نمونه های زیر توجه کنید،

مثال : حد توابع زیر را بدست آورید.

$$۱)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} (\sin^{۲} x + \cos x + ۱)$$

حل :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} (\sin^{۲} x + \cos x + ۱) = \sin^{۲}(\frac{\pi}{۲}) + \cos(\frac{\pi}{۲}) + ۱ = ۱ + ۰ + ۱ = ۲$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۱} \frac{۳x^{۲} + ۵x}{x - ۴}$$

حل :

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۳x^{۲}+۵x}{x-۴}=\frac{۳(۱)^{۲}+۵(۱)}{(۱)-۴}=\frac{۳+۵}{-۳}=-\frac{۸}{۳}$$

۳) $\lim_{x\to ۴} e^{۲x-۸}$

حل :

$$\lim_{x\to ۴} e^{۲x-۸}=e^{۲(۴)-۸}=e^{\circ}=۱$$

۴) $\lim_{x\to ۱}\sqrt[۳]{x^{۲}+۵x+۲}$

حل :

$$\lim_{x\to ۱}\sqrt[۳]{x^{۲}+۵x+۲}=\lim_{x\to ۱}\sqrt[۳]{(۱)^{۲}+۵(۱)+۲}=\sqrt[۳]{۸}=۲$$

توجه : حد تابع ثابت مانند $f(x)=k$ در هر نقطه برای k است.

تمرین۱ : ثابت کنید که اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ آنگاه $\lim_{x\to a}(f(x)-L)=۰$

اثبات :

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \to \lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} L=L-\lim_{x\to a} L$$

$$\xrightarrow{\lim_{x\to a} L=L} \lim_{x\to a}(f(x)-L)=L-L \to \lim_{x\to a}(f(x)-L)=۰$$

تمرین۲ : ثابت کنید که اگر $\lim_{x\to a}(f(x)-L)=۰$ آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)=L$

اثبات :

$$\lim_{x\to a}(f(x)-L)=۰ \to \lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} L=۰$$

$$\to \lim_{x\to a} f(x)-L=0 \to \lim_{x\to a} f(x)=L$$

تمرین۳ : دو تابع مثال بزنید که هیچ کدام در نقطه‌ی $x=1$ حد نداشته باشند، ولـی مجمـوع آن هـا در ایـن نقطه دارای حد باشد.

حل : قرار می دهیم.

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & x>1\\ 2 & x\le 1\end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{cases}x-1 & x>1\\ -2 & x\le 1\end{cases}$$

$$\to (f+g)(x)=\begin{cases}0 & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases} \to (f+g)(x)=0$$

در این صورت $\lim_{x\to 1}(f+g)(x)=0$ در حالی که دو تابع f و g در نقطه‌ی $x=1$ دارای حد نیستند.

تمرین۴ : حد تابع $f(x)=\dfrac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}$ را در نقطه‌ی $x=8$ در صورت وجود به دست آورید.

حل : در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x=8$ برابر صفرند. باید عامل $x-8$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. برای این کار مخرج کسر را با ضرب صورت و مخرج در $\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4$ گویا می کنیم.

$$\lim_{x\to 8} f(x)=\lim_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\lim_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{(\sqrt[3]{x})^3-(2)^3}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{1}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{x(x-8)}{x-8}\times(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)=\lim_{x\to 8} x(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)$$

$$=8(4+4+4)=96$$

تمرین۵ : تابع $f(x)=x^{۲}+۵x-۱$ را در نظر بگیرید و سپس حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ را به دست آورید.

حل :

$$f(۲)=(۲)^{۲}+۵(۲)-۱=۱۳$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x^{۲}+۵x-۱)-(۱۳)}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}+۵x-۱۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۷)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(x+۷)=۲+۷=۹$$

***

راهبرد تغییر متغیر

گاهی لازم می شود برای محاسبه ی حد تابع در یک نقطه ، متغیر را تغییر دهیم و متغیر جدیدی را تعریف کنیم.

توجه داشته باشید که متغیر جدید ممکن است به عددی دیگری میل کند و باید در محاسبه اعمال شود.

تمرین۶ : مقدار حد روبرو را بیابید.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\sqrt{x}=t}\lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱}=\lim_{t\to ۱}\frac{۲t^{۲}-۳t+۱}{t^{۲}-۱}$$

$$=\lim_{t\to ۱}\frac{(t-۱)(۲t-۱)}{(t-۱)(t+۱)}=\lim_{t\to ۱}\frac{۲t-۱}{t+۱}=\frac{۱}{۲}$$

تمرین۷ حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to -۲}\frac{\sin(x+۲)}{۳x+۶}$$

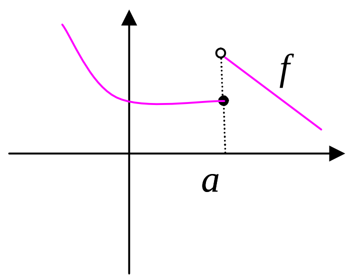
حل : کافی است قرار دهیم $x+۲=t$

$$\lim_{x\to -۲}\frac{\sin(x+۲)}{۳(x+۲)}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin t}{۳t}=\frac{۱}{۳}$$

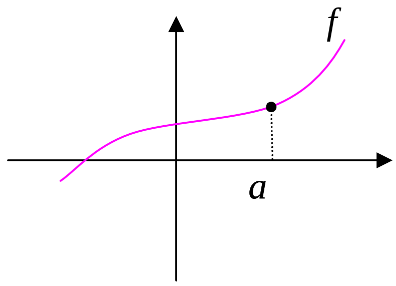
***

پیوستگی تابع در یک نقطه

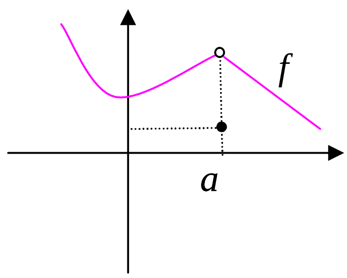
بررسی پیوستگی یک تابع در یک نقطه می تواند در شناخت رفتار یک تابع کمک نماید. از نظر هندسـی تـابعی را در یک نقطه، پیوسته گویند، هرگاه نمودار آن تابع در این نقطه بریدگی یا پرش نداشته باشد. به نمودار هـای زیـر توجه کنید.



تابع در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته نیست.



تابع در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته است.



تابع در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته نیست.

***

تعریف ریاضی پیوستگی تابع در یک نقطه

تابع $y=f(x)$ را در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته گویند، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.

الف) تابع در نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد. یعنی $f(a)$ وجود داشته باشد.

ب) تابع در نقطه‌ی $x=a$ حد داشته باشد. یعنی $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

ج) حد تابع در این نقطه با مقدار آن برابر باشد. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

به عبارتی دیگر تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ پیوسته است، هرگاه

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

اگر یکی از شرط های فوق برقرار نباشد، گویند تابع در $x = a$ پیوسته نیست.

مثال: پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $x = ۱$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۳ & x > ۱ \\ ۵ & x = ۱ \\ ۲x - ۵ & x < ۱ \end{cases}$$

حل : کافی است، شرایط پیوستگی را بررسی کنیم.

حد راست $\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} x^۲ + ۳ = (۱)^۲ + ۳ = ۴$

حد چپ $\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} (۲x - ۵) = ۲(۱) - ۵ = -۳$

مقدار $f(۱) = ۵$

لذا تابع در نقطه‌ی $x = ۱$ پیوسته نیست.

تمرین۸ : پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $x = ۲$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۱ & x \leq ۲ \\ ۳x - ۱ & x > ۲ \end{cases}$$

حل : کافی است، شرایط پیوستگی را بررسی کنیم.

حد راست $\lim_{x \to ۲^+} f(x) = \lim_{x \to ۲^+} (۳x - ۱) = ۳(۲) - ۱ = ۵$

حد چپ $\lim_{x \to ۲^-} f(x) = \lim_{x \to ۲^-} (x^۲ + ۱) = (۲)^۲ + ۱ = ۵$

مقدار $f(۲) = (۲)^۲ + ۱ = ۵$

لذا تابع در نقطه‌ی $x = ۲$ پیوسته است.

تمرین۹: تابع زیر در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته است. مقدار a را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} ۲ax^{۲}+۵ & x\geq ۱ \\ ۶x-۳ & x<۱ \end{cases}$$

حل :

حد راست $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{+}}(۲ax^{۲}+۵x)=۲a(۱)^{۲}+۵(۱)=۲a+۵$

حد چپ $\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{-}}(۶x-۳)=۶(۱)-۳=۳$

مقدار $f(۱)=۲a(۱)^{۲}+۵(۱)=۲a+۵$

و چون تابع در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته است، پس :

$$۲a+۵=۳\rightarrow ۲a=۳-۵\rightarrow ۲a=-۲\rightarrow a=-۱$$

نتیجه :

۱ : هر تابع چند جمله ای به ازاء جمیع مقادیر حقیقی پیوسته است.

۲ : هر تابع کسری به ازاء جمیع مقادیر حقیقی به جز ریشه های مخرج آن پیوسته است.

۳ : هر تابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج (تابع اصم) به ازاء همه‌ی مقادیر حقیقی کـه زیـر رادیکـال را نـامنفی کننـد، پیوسته است.

توجه : یک تابع کسری وقتی همواره پیوسته است که مخرج آن ریشه نداشته باشد.

تمرین۱۰: نقاط ناپیوستگی تابع را تعیین کنید.

$$f(x)=\frac{۵}{x-۴x^{۳}}$$

حل : کافی است ریشه های مخرج را تعیین کنیم.

$$x-۴x^{۳}=۰\rightarrow x(۱-۴x^{۲})=۰$$

$$\rightarrow\begin{cases} x=۰ \\ ۱-۴x^{۲}=۰\rightarrow x=\pm\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

تمرین۱۱: به ازاء چه مقادیری از m تابع f به معادله‌ی $f(x)=\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}+mx+۱}$ همواره پیوسته است .

حل : این تابع وقتی همواره پیوسته است که مخرج آن ریشه نداشته باشد. بر این اساس می توان نوشت :

$$x^{۲}+mx+۱=۰$$

$$\Delta<۰\xrightarrow{\Delta=b^{۲}-۴ac}b^{۲}-۴ac<۰\rightarrow m^{۲}-۴<۰\rightarrow m^{۲}<۴\rightarrow -۲<m<۲$$

***

پایان