به نام خدا

کلیپ۵	ریاضی عمومی۲	مدرس : جابرعامری

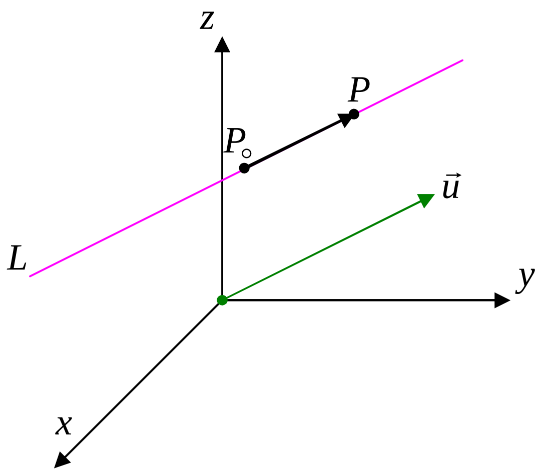
آموزشکده های فنی خوزستان

موضوع : معادلات خط و صفحه

***

معادلات خط و صفحه در فضا

الف) خط در فضا



اگر $P(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ نقطه ی معلومی از خط L و بردار ناصفر $\vec{u}=(p,q,r)$ که موازی با L باشد را به طور منحصر بفرد داشته باشیم. در این صورت معادله ی خط L را می توان به شکل های زیر نوشت:

معادلات پارامتری خط

$$\begin{cases} x = x_\circ + pt \\ y = y_\circ + qt \\ z = z_\circ + rt \end{cases}$$

معادلات متعارف خط (معادلات دکارتی)

$$\frac{x-x_\circ}{p} = \frac{y-y_\circ}{q} = \frac{z-z_\circ}{r}$$

توجه : بردار $\vec{u}$ که موازی خط L است را بردار هادی خط L می نامند که همواره امتداد خط L را نشان می دهد.

تمرین۱ : خطی از نقطه‌ی $P_{\circ}(۲\,,-۴\,,۱)$ می گذرد و موازی با بردار $\vec{u}=(۳\,,۲\,,-۱)$ است .

الف : معادلات پارامتری این خط را بنویسید. ب : معادلات متعارف این خط را بنویسید.

حل :

الف: معادلات پارامتری خط

$$\begin{cases} x=x_{\circ}+pt \\ y=y_{\circ}+qt \\ z=z_{\circ}+rt \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=۲+۳t \\ y=-۴+۲t \\ z=۱-t \end{cases}$$

ب : معادلات متعارف خط

$$\frac{x-x_{\circ}}{p}=\frac{y-y_{\circ}}{q}=\frac{z-z_{\circ}}{r} \rightarrow \frac{x-۲}{۳}=\frac{y+۴}{۲}=\frac{z-۱}{-۱}$$

تمرین ۲ : معادلات متعارف خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $P_۱(۴\,,-۶\,,۵)$ و $P_۲(۲\,,-۳\,,۰)$ می گذرد.

حل: کافی است که امتداد خط را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\vec{u}=\overrightarrow{P_۱P_۲}=(۲-۴,-۳+۶,۰-۵)=(-۲,۳,-۵)$$

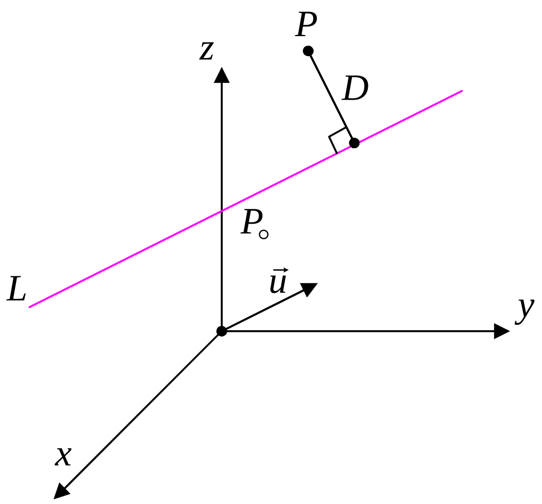
حال یکی از نقاط داده شده ، مثلاً $P_۲(۲\,,-۳\,,۰)$ قرار دهیم : $(x_{\circ}=۲\,,y_{\circ}=-۳\,,z_{\circ}=۰)$

و لذا معادله‌ی خط به شکل زیر خواهد شد.

$$\frac{x-x_{\circ}}{p}=\frac{y-y_{\circ}}{q}=\frac{z-z_{\circ}}{r} \rightarrow \frac{x-۲}{-۲}=\frac{y+۳}{۳}=\frac{z}{-۵}$$

❊❊❊

فاصله‌ی یک نقطه از یک خط



فرض کنیم L خطی باشد که با بردار غیر صفر $\vec{u}$ موازی است و P را نقطه ای در نظر بگیریم که خارج (یا روی) L قرار دارد. در این صورت فاصله ی نقطه ی P از خط L یعنی D برابر است با:

$$D=\frac{\|\vec{u}\times\overrightarrow{P_\circ P}\|}{\|\vec{u}\|}$$

که در آن $P_\circ$ نقطه ی دلخواهی از صفحه است.

تمرین ۳ : فاصله‌ی نقط ی $P(۵,-۶,۲)$ را از خط L به معادلات پارامتری زیر بدست آورید.

$$\begin{cases} x=۱ \\ y=-۱+۴t \\ z=۲-۳t \end{cases}$$

حل: نقطه‌ی $P_\circ(۱,-۱,۲)$ را روی خط L در نظر می گیریم. بردار $\vec{u}=(۰,۴,-۳)$ موازی L است. پس:

$$\overrightarrow{P_\circ P}=(۵-۱,-۶+۱,۲-۲)=(۴,-۵,۰)$$

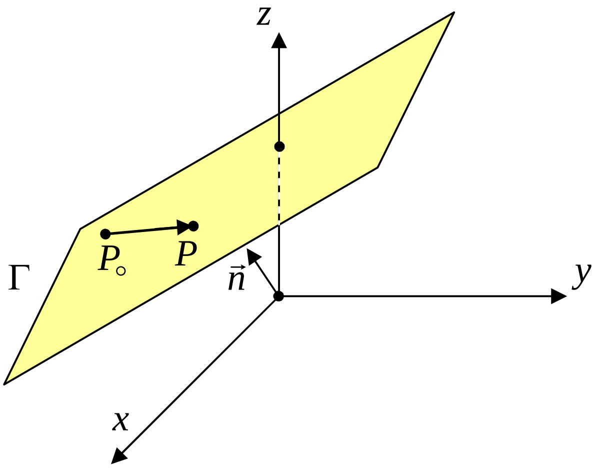
$$\vec{u}\times\overrightarrow{P_\circ P}=(-۱۵,-۱۲,-۱۶)$$

$$\|\vec{u}\times\overrightarrow{P_\circ P}\|=\sqrt{(-۱۵)^۲+(-۱۲)^۲+(-۱۶)^۲}=\sqrt{۶۲۵}=۲۵$$

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{(۰)^۲+(۴)^۲+(-۳)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

$$\therefore D=\frac{\|\vec{u}\times\overrightarrow{P_\circ P}\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{۲۵}{۵}=۵$$

ب) صفحه در فضا



هر صفحه در فضای R^3 با یک نقطه روی آن و یک بردار که بر آن صفحه عمود است مشخص می شود.

اگر $P(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$ یک نقطه از صفحه و بردار غیر صفر $\vec{n} = (a,b,c)$ عمود بر آن صفحه باشد و $P(x,y,z)$ نقطه‌ی دلخواهی از آن فرض شود.

آنگاه معادله‌ی صفحه به صورت زیر خواهد بود.

$$a(x - x_\circ) + b(y - y_\circ) + c(z - z_\circ) = 0$$

توجه : بردار n را بردار نرمال صفحه‌ی Γ می نامند. بردار نرمال صفحه همواره بر آن صفحه عمود است.

تمرین ۴ : معادله‌ی صفحه ای را بنویسید که از نقطه‌ی $A(2,\ 3, -1)$ گذشته و بر بردار $\vec{n} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ عمود باشد.

حل:

$$\vec{n} = 3i - 2j + 5k = (3,-2,5)$$

$$a(x - x_\circ) + b(y - y_\circ) + c(z - z_\circ) = 0$$

$$\to 3(x-2) - 2(y-3) + 5(z+1) = 0 \to 3x - 2y + 5z = -5$$

تمرین ۵ : معادله‌ی صفحه ای را بنویسید که از نقطه‌ی $A(-3, 2, 1)$ گذشته و بر خط $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-1}$ عمود باشد.

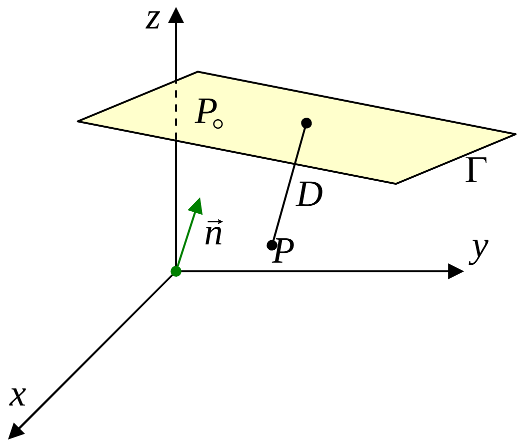
حل: چون صفحه و خط بر هم عمودند، پس بردار نرمال صفحه می تواند بردار هادی خط باشد.

$$\vec{n} = \vec{u} = (3,2,-1)$$

$$a(x - x_\circ) + b(y - y_\circ) + c(z - z_\circ) = 0$$

$$3(x+3) + 2(y-2) - (z-1) = 0 \to 3x + 2y - z = -6$$

فاصله‌ی یک نقطه از یک صفحه



فرض کنیم Γ صفحه ای باشد که بر بردار غیر صفر $\vec{n}$ عمود است و P را نقطه ای در نظر بگیریم که خارج (یا روی) Γ قرار دارد. در این صورت فاصله ی نقطه‌ی P از صفحه‌ی Γ یعنی D برابر است با:

$$D=\frac{|\vec{n}.\overrightarrow{P_\circ P}|}{\|\vec{n}\|}$$

که در آن $P_\circ$ نقطه‌ی دلخواهی از صفحه است.

تمرین ۶: فاصله‌ی نقطه‌ی $P(\cdot,\ ۲,۱)$ را از صفحه‌ی Γ به معادله‌ی $x+y+\sqrt{۲}z+۲-\sqrt{۲}=\cdot$ بدست آورید.

حل:

$$P_\circ\in\Gamma\rightarrow P_\circ(\sqrt{۲},-۲,\cdot)$$

$$\vec{n}=(۱,۱,\sqrt{۲}) \qquad \overrightarrow{P_\circ P}=(-\sqrt{۲},۴,۱)$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{P_\circ P}=۱(-\sqrt{۲})+۴(۱)+۱(\sqrt{۲})=۴$$

$$\|\vec{n}\|=\sqrt{۱+۱+۲}=۲$$

$$D=\frac{|\vec{n}.\overrightarrow{P_\circ P}|}{\|\vec{n}\|}=\frac{۴}{۲}=۲$$

نتیجه: فاصله‌ی نقطه‌ی $P(x_۱,y_۱,z_۱)$ از صفحه‌ی Γ به معادله‌ی $ax+by+cz+d=\cdot$ به صورت زیر است.

$$D=\frac{|ax_۱+by_۱+cz_۱+d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$$

تمرین۷: فاصله‌ی نقطه‌ی $P(۰,۲,۱)$ را از صفحه‌ی Γ به معادله‌ی $x+y+\sqrt{۲}z+۲-\sqrt{۲}=۰$ بدست آورید.

حل:

$$D=\frac{|ax_۱+by_۱+cz_۱+d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}}$$

$$=\frac{|(۱)(۰)+(۱)(۲)+(\sqrt{۲})(۱)+(۲-\sqrt{۲})|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲+(\sqrt{۲})^۲}}=\frac{|۲+\sqrt{۲}+۲-\sqrt{۲}|}{\sqrt{۴}}=\frac{۴}{۲}=۲$$

***

پایان