به نام خدا

کلیپ۴	ریاضی عمومی۲	مدرس : جابرعامری

آموزشکده های فنی خوزستان

موضوع : کاربرد هایی برای ضرب داخلی و ضرب خارجی

***

رابطه‌ی بین ضرب خارجی و ضرب داخلی دو بردار

برای هر دو بردارغیر صفر $\vec{v}$ و $\vec{u}$. ثابت کنید که

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|^{۲}=\|\vec{u}\|^{۲}\|\vec{v}\|^{۲}-(\vec{u}.\vec{v})^{۲}$$

تمرین۱ : اگر $\|\vec{u}\|=۱۰$ و $\|\vec{v}\|=۲$ و $\vec{u}.\vec{v}=۱۲$ اندازه‌ی بردار $\vec{u}\times\vec{v}$ را بیابید.

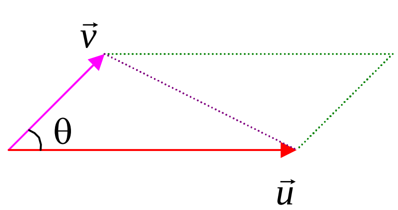
$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|^{۲}=\|\vec{u}\|^{۲}\|\vec{v}\|^{۲}-(\vec{u}.\vec{v})^{۲}=۱۰^{۲}\times۲^{۲}-(۱۲)^{۲}=۴۰۰-۱۴۴=۲۵۶$$

$$\rightarrow\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{۲۵۶}=۱۶$$

***

مساحت متوازی الاضلاع

برای هر دو بردار غیر صفر و غیر موازی $\vec{v}$ و $\vec{u}$ که زاویه‌ی بین آنها θ (کوچکترین زاویه‌ی بین آنها) است. می توان یک متوازی الاضلاع به شکل زیر ساخت. در این صورت مساحت متوازی الاضلاع از رابطه های زیر بدست می آید.



$\theta\neq۰,\pi$

$S=\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ مساحت متوازی الاضلاع

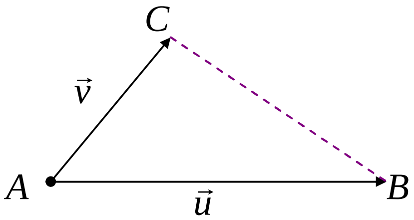
نتیجه: مساحت مثلثی که با دو بردار غیر موازی و غیر صفر $\vec{v}$ و $\vec{u}$ تولید می شود، برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}\|\vec{u}\times\vec{v}\|$$

***

تمرین۲: مساحت مثلثی را حساب کنید که $A(۱,۲,۰)$ و $B(۳,۰,-۳)$ و $C(۵,۲,۶)$ سه رأس آن باشند.

حل : تعریف می کنیم:



$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(۳-۱,۰-۲,-۳-۰)=(۲,-۲,-۳)$$

$$\vec{v}=\overrightarrow{AC}=(۵-۱,۲-۲,۶-۰)=(۴,۰,۶)$$

در این صورت:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}-۲ & -۳\\ ۰ & ۶\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۳ & ۲\\ ۶ & ۴\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & -۲\\ ۴ & ۰\end{vmatrix}\right)=(-۱۲,-۲۴,۸)$$

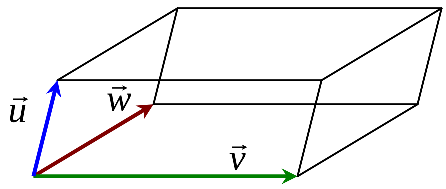
$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{(-۱۲)^۲+(-۲۴)^۲+(۸)^۲}=\sqrt{۱۴۴+۵۷۶+۶۴}=\sqrt{۷۸۴}=۲۸$$

$$S=\frac{۱}{۲}\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\frac{۱}{۲}\times ۲۸=۱۴$$

***

حجم متوازی السطوح

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ سه بردار غیر واقع بر یک صفحه باشند. در این صورت با این سه بردار یک متوازی السطوح تشکیل می شود. حجم متوازی السطوح را می توان به شکل زیر محاسبه نمود.



حجم متوازی السطوح $V=|\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|$

***

تمرین۳: اندازه‌ی ارتفاع و حجم متوازی السطوحی را حساب کنید که توسط بردار های $\vec{u}=(۱,۱,۰)$ و $\vec{v}=(۰,۱,۱)$ و $\vec{w}=(۱,۰,۱)$ تولید می شود.

حل :

$$\vec{v}\times\vec{w}=\left(\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۰ & ۱\\ ۱ & ۰\end{vmatrix}\right)=(۱,۱,-۱)$$

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=(۱)(۱)+(۱)(۱)+(۰)(-۱)=۲$$

$$\|\vec{v}\times\vec{w}\|\sqrt{(۱)^۲+(۱)^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۱+۱+۱}=\sqrt{۳}$$

ارتفاع متوازی السطوح $h=\vec{u}'=\dfrac{|\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|}{\|\vec{v}\times\vec{w}\|}=\dfrac{۲}{\sqrt{۳}}$

حجم متوازی السطوح $V=|\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})|=۲$

***

نتیجه : بردار های $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ روی یک صفحه واقعند اگر و فقط اگر حجم متوازی السطوحی که با این سه بردار ساخته می شود برابر صفر باشد. یعنی $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=۰$

***

تمرین۴ : نشان دهید که سه بردار $\vec{u}=(۱,۱,۰)$ و $\vec{v}=(۱,۱,۱)$ و $\vec{w}=(۰,۰,۱)$ روی یک صفحه واقعند.

حل: کافی است نشان دهیم که $\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=۰$

$$\vec{v}\times\vec{w}=\left(\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & ۰\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۰ & ۰\end{vmatrix}\right)=(۱,-۱,۰)$$

$$\vec{u}.(\vec{v}\times\vec{w})=(۱)(۱)+(۱)(-۱)+(۰)(۰)=۰$$

***

پایان