به نام خدا

کلیپ۲ ریاضی عمومی۲ مدرس : جابر عامری

آموزشکده های فنی خوزستان

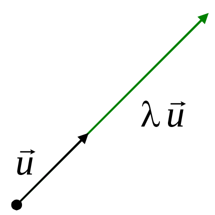
موضوع : اعمال روی بردار ها

***

ضرب عدد در بردار

اگر $\vec{u}=(a,b,c)$ یک بردار و λ یک عدد حقیقی باشد. در این صورت $\lambda\vec{u}$ برداری است که از ضرب عدد λ در تمام مولفه های $\vec{u}$ بدست می آید.

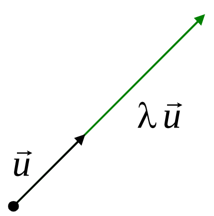
$$\lambda\vec{u}=\lambda(a,b,c)=(\lambda a,\lambda b,\lambda c)$$



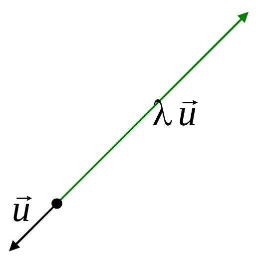
توجه داشته باشید که :

۱ : اگر $\lambda=۰$ باشد، $\lambda\vec{u}=\vec{o}$

۲ : اگر $\lambda>۰$ باشد، بردار های $\lambda\vec{u}$ و $\vec{u}$ هم جهت هستند.



۳ : اگر $\lambda<۰$ باشد، بردار های $\lambda\vec{u}$ و $\vec{u}$ در جهت مخالف همدیگر هستند.



۴ : اگر $\lambda=۱$ باشد، $\lambda\vec{u}=\vec{u}$

۵ : اگر $\lambda=-۱$ باشد، $\lambda\vec{u}=-\vec{u}$

۶ : در هر صورت $\|\lambda\vec{u}\|=|\lambda|\,\|\vec{u}\|$

نتیجه :

۱ : حاصل ضرب عدد ۱− در بردار غیر صفر $\vec{u}$ یعنی $(-۱)\vec{u}$ را قرینه‌ی بردار $\vec{u}$ می نامند و آن را با $-\vec{u}$ نمایش می دهند.

۲ : دو بردار غیر صفر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موازیند، هرگاه وجود داشته باشد عدد حقیقی غیر صفر λ بطوری که $\vec{u} = \lambda\,\vec{v}$

***

تمرین ۱ : نشان دهید که دو بردار $\vec{u} = (۶,۳,-۹)$ و $\vec{v} = (۲,۱,-۳)$ موازی یکدیگرند.

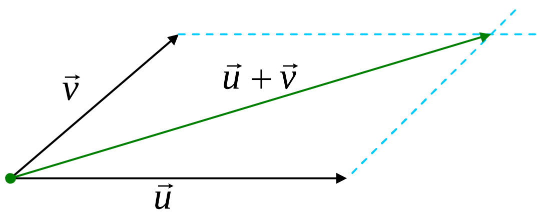
حل : کافی است که نشان دهیم یک عدد حقیقی پیدا می شود که با ضرب آن در یکی از بردار ها، بردار دیگر حاصل می شود. با قدری دقت در اینجا، واضح است که $\vec{u} = ۳\vec{v}$ و لذا $\vec{u} \,||\, \vec{v}$

***

جمع دو بردار

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار باشند، بردار حاصل جمع این دو بردار به صورت زیر تعریف می شود.

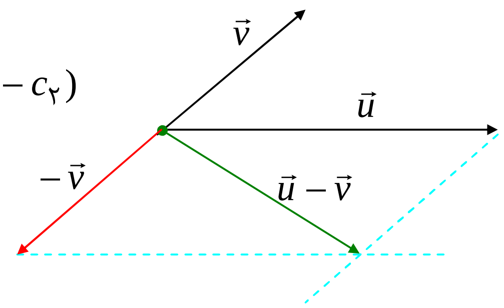
$$\vec{u} = (a_۱, b_۱, c_۱)$$
$$\vec{v} = (a_۲, b_۲, c_۲)$$
$$\vec{u} + \vec{v} = (a_۱ + a_۲ \;,\; b_۱ + b_۲ \;,\; c_۱ + c_۲)$$



تفریق دو بردار

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار باشند، بردار حاصل تفریق این دو بردار به صورت زیر تعریف می شود.

$$\vec{u} = (a_۱, b_۱, c_۱)$$
$$\vec{v} = (a_۲, b_۲, c_۲)$$
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (a_۱ - a_۲ \;,\; b_۱ - b_۲ \;,\; c_۱ - c_۲)$$



تمرین ۲ : اگر $\vec{u}=(۵,۳,۰)$ و $\vec{v}=(-۱,۲,۳)$ مطلوبست محاسبه‌ی

الف) $-۲\vec{u}$ ب) $\vec{u}+\vec{v}$ ج) $\vec{u}-\vec{v}$

حل :

الف) $-۲\vec{u}=-۲(۵,۳,۰)=(-۱۰,-۶,۰)$

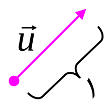
ب) $\vec{u}+\vec{v}=(۵,۳,۰)+(-۱,۲,۳)=(۴,۵,۳)$

ج) $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})=(۵,۳,۰)+(۱,-۲,-۳)=(۶,۱,-۳)$

***

بردار واحد

هر بردار که اندازه‌ی آن یک واحد طول باشد، را بردار واحد (یکّه) می نامند.



$$\|\vec{u}\|=۱$$

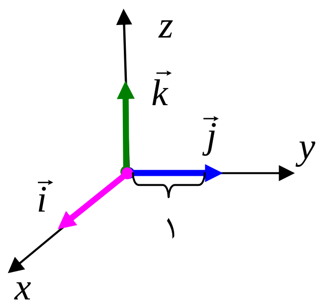
تمرین ۳ : نشان دهید که بردار $\vec{u}=(\frac{۱}{۴},\frac{\sqrt{۱۱}}{۴},-\frac{۱}{۲})$ بردار واحد است.

حل :

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{(\frac{۱}{۴})^۲+(\frac{\sqrt{۱۱}}{۴})^۲+(-\frac{۱}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱۱}{۱۶}+\frac{۱}{۴}}=\sqrt{\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱۱}{۱۶}+\frac{۴}{۱۶}}=۱$$

***

بردار های واحد مختصات



در فضای سه بعدی $R^۳$ بردار های واحد $\vec{i}=(۱,۰,۰)$ و $\vec{j}=(۰,۱,۰)$ و $\vec{k}=(۰,۰,۱)$ که به ترتیب در جهت مثبت محور طول ها، عرض ها و ارتفاع ها قرار دارند را بردار های یکه‌ی استاندارد یا بردارهای واحد مختصات می نامند.

هر بردار را می توان بر حسب بردار های واحد مختصات نوشت:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (a,b,c)\\ &= (a,۰,۰) + (۰,b,۰) + (۰,۰,c)\\ &= a(۱,۰,۰) + b(۰,۱,۰) + c(۰,۰,۱)\\ &= a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}\end{aligned}$$

تمرین ۴ : اگر $\vec{u} = ۲\vec{i} - \vec{j} + ۳\vec{k}$

الف : مختصات بردار $\vec{u}$ را بنویسید. ب : اندازه ی بردار $\vec{u}$ را محاسبه کنید.

حل :

الف) $\vec{u} = (۲, -۱, ۳)$

ب) $\|\vec{u}\| = \sqrt{(۲)^۲ + (-۱)^۲ + (۳)^۲} = \sqrt{۴ + ۱ + ۹} = \sqrt{۱۴}$

❋❋❋

پایان