به نام خدا

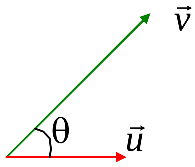
کلیپ۳	**ریاضی عمومی۲**	**مدرس : جابرعامری**

آموزشکده های فنی خوزستان

موضوع : اعمال روی بردار ها

❋❋❋

ضرب داخلی دو بردار



تعریف هندسی ضرب داخلی : اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار غیر صفر باشند و θ کوچکترین زاویه ی بین آنها در نظر گرفته شود. در این صورت ضرب داخلی (ضرب نقطه ای) دو بردار را با $\vec{u}.\vec{v}$ نشان داده و به شکل زیر تعریف می کنند.

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$$

❋❋❋

تمرین۱ : اگر $\|\vec{v}\| = \sqrt{۳}$ و $\|\vec{u}\| = \sqrt{۱۲}$ و زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ برابر۳۰ درجه باشد. حاصل ضرب داخلی این دو بردار را بدست آورید.

حل :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta = \sqrt{۱۲} \times \sqrt{۳} \times \cos ۳۰ = ۲\sqrt{۳} \times \sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳\sqrt{۳}$$

❋❋❋

تعریف تحلیلی ضرب داخلی: اگر $\vec{u} = (a_۱, b_۱, c_۱)$ و $\vec{v} = (a_۲, b_۲, c_۲)$ دو بردار در فضای سه بعدی باشند، آنگاه ضرب داخلی آنها به صورت زیر تعریف می شود.

$$\vec{u}.\vec{v} = a_۱a_۲ + b_۱b_۲ + c_۱c_۲$$

تمرین۲ : اگر $\vec{u}=(۰,۲,۱)$ و $\vec{v}=(-۱,۱,۳)$ آنگاه مطلوبست تعیین :

الف) $\vec{u}.\vec{v}=$ ب) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=$

حل :

الف) $\vec{u}.\vec{v}=(۰)(-۱)+(۲)(۱)+(۱)(۳)=۰+۲+۳=۵$

ب) $\vec{u}+\vec{v}=(-۱,۳,۴)$ و $\vec{u}-\vec{v}=(۱,۱,-۲)$

$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=(-۱)(۱)+(۳)(۱)+(۴)(-۲)=-۱+۳-۸=-۶$$

نتیجه : حاصل ضرب داخلی دو بردار همیشه یک عدد حقیقی است.

***

تمرین۳ : اگر دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موازی باشند و $\vec{u}=(۱,-۲,۲)$ و $\vec{u}.\vec{v}=۱۵$ مختصات بردار $\vec{v}$ را تعیین کنید.

حل :

$$\vec{u}\parallel\vec{v}\xrightarrow{\exists r\in R}\vec{v}=r\vec{u}\rightarrow\vec{v}=r(۱,-۲,۲)=(r,-۲r,۲r)$$

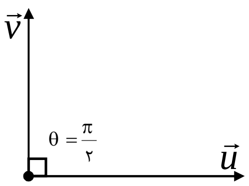
$$\vec{u}.\vec{v}=۱۵\rightarrow(۱)(r)+(-۲)(-۲r)+(۲)(۲r)=۱۵\rightarrow r+۴r+۴r=۱۵\rightarrow r=\frac{۱۵}{۹}=\frac{۵}{۳}$$

$$\therefore\vec{v}=(r,-۲r,۲r)=(\frac{۵}{۳},\frac{-۱۰}{۳},\frac{۱۰}{۳})$$

***

نتیجه : دو بردار بر هم عمودند، هرگاه ضرب داخلی آنها صفر باشد و برعکس

یعنی :



برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بردار $\vec{u}$ بر $\vec{v}$ عمود است، اگر و فقط اگر $\vec{u}.\vec{v}=۰$ و بر عکس

$$\vec{u}\perp\vec{v}\leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=۰$$

***

تمرین۴ : نشان دهید که دو بردار $\vec{u}=(-۴,۵,۷)$ و $\vec{v}=(۱,-۲,۲)$ بر هم عمودند.

حل :

$$\vec{u}.\vec{v}=(-۴)(۱)+(۵)(-۲)+(۷)(۲)=-۴-۱۰+۱۴=۰\rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

***

تمرین۵ : اگر $A(۴,۹,۱)$ و $B(۶,۳,-۲)$ و $C(-۲,۶,۳)$. سه رأس مثلث ABC باشند، نشان دهید که این مثلث قائم الزاویه است.

حل : می دانیم متناظر با هر پیکان یک بردار مساوی آن وجود دارد. حال نشان می دهیم که بردار های متناظر با دو ضلع از مثلث فوق بر هم عمودند. قرار می دهیم:

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)=(۶-۴,۳-۹,-۲-۱)=(۲,-۶,-۳)$$

$$\vec{v}=\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A,y_C-y_A,z_C-z_A)=(-۲-۴,۶-۹,۳-۱)=(-۶,-۳,۲)$$

$$\vec{u}.\vec{v}=(۲)(-۶)+(-۶)(-۳)+(-۳)(۲)=-۱۲+۱۸-۶=۰\rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

***

تعیین زاویه‌ی بین دو بردار

اگر $\vec{v}$ و $\vec{u}$ دو بردار غیر صفر و θ زاویه‌ی بین آنها باشد.در این صورت:

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\qquad ۰\le\theta\le\pi$$

توجه : زاویه‌ی بین دو بردار ناصفر $\vec{v}$ و $\vec{u}$ کوچکترین زاویه ای است که این دو بردار با هم تشکیل می دهند.

تمرین۶ : زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{u}=(۲,-۱,۱)$ و $\vec{v}=(۱,۱,۲)$ را بیابید.

حل :

$$\vec{u}.\vec{v} = (۲)(۱) + (-۱)(۱) + (۱)(۲) = ۳$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(۲)^۲ + (-۱)^۲ + (۱)^۲} = \sqrt{۴+۱+۱} = \sqrt{۶}$$

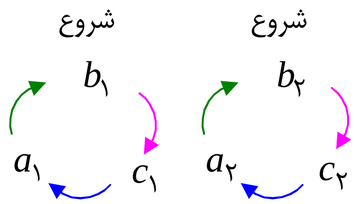
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(۱)^۲ + (۱)^۲ + (۲)^۲} = \sqrt{۱+۱+۴} = \sqrt{۶}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{۳}{\sqrt{۶}\times\sqrt{۶}} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \rightarrow \angle\theta = \frac{\pi}{۳}$$

***

ضرب خارجی دو بردار

فرض کنیم که $\vec{u} = (a_۱, b_۱, c_۱)$ و $\vec{v} = (a_۲, b_۲, c_۲)$ دو بردار باشند. ضـرب خـارجی (ضـرب بـرداری) $\vec{u}$ در $\vec{v}$ را که با نماد $\vec{u}\times\vec{v}$ نمایش داده می شود، به صورت زیر تعریف می کنیم.



مؤلفه های بردار اوّل بالا و مؤلفه های بردار دوم پایین قرار می گیرند.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} b_۱ & c_۱ \\ b_۲ & c_۲ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_۱ & a_۱ \\ c_۲ & a_۲ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ \\ a_۲ & b_۲ \end{vmatrix} \right) = (b_۱c_۲ - b_۲c_۱, a_۲c_۱ - a_۱c_۲, a_۱b_۲ - a_۲b_۱)$$

***

تمرین ۷ : اگر $\vec{u} = (۲, -۱, ۳)$ و $\vec{v} = (-۱, -۲, ۴)$. در این صورت بردار های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\vec{u}\times\vec{v} =$ ب) $\vec{v}\times\vec{u} =$ ج) $\vec{u}\times\vec{u} =$

حل :

الف :

$$\vec{u}\times\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ -۲ & ۴ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۴ & -۱ \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix} \right) = (۲, -۱۱, -۵)$$

ب :

$$\vec{v}\times\vec{u}=(\begin{vmatrix}-۲ & ۴\\ -۱ & ۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۴ & -۱\\ ۳ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & -۲\\ ۲ & -۱\end{vmatrix})=(-۲,۱۱,۵)$$

ج :

$$\vec{u}\times\vec{u}=(\begin{vmatrix}-۱ & ۳\\ -۱ & ۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۳ & ۲\\ ۳ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & -۱\\ ۲ & -۱\end{vmatrix})=(۰,۰,۰)=\vec{o}$$

نتیجه:

۱ : ضرب خارجی دو بردار همواره یک بردار است. **۲ :** ضرب خارجی دو بردار خاصیت جابجایی ندارد.

***

تمرین۸ : اگر $\vec{u}=(۱,-۱,۰)$ و $\vec{v}=(۲,۱,-۱)$. مطلوبست تعیین بردار $(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})$

حل :

$$\vec{u}-\vec{v}=(۱,-۱,۰)-(۲,۱,-۱)=(-۱,-۲,۱)$$
$$\vec{u}+\vec{v}=(۱,-۱,۰)+(۲,۱,-۱)=(۳,۰,-۱)$$
$$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v})=(\begin{vmatrix}-۲ & ۱\\ ۰ & -۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & -۱\\ -۱ & ۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & -۲\\ ۳ & ۰\end{vmatrix})=(۲,۲,۶)$$

***

تمرین ۹ : اگر $\vec{u}=۲\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}+۲\vec{k}$ اندازه‌ی بردار $\vec{u}\times\vec{v}$ را بدست آورید.

حل :

$$\vec{u}=(۲,۱,۱)$$
$$\vec{v}=(۱,-۱,۲)$$
$$\vec{u}\times\vec{v}=(\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ -۱ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & -۱\end{vmatrix})=(۳,-۳,-۳)$$
$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{(۳)^۲+(-۳)^۲+(-۳)^۲}=\sqrt{۹+۹+۹}=۳\sqrt{۳}$$

***

تمرین۱۰: نشان دهید که دو بردار $\vec{u}=(۱,۲,-۳)$ و $\vec{v}=(-۳,-۶,۹)$ موازی همدیگرند.

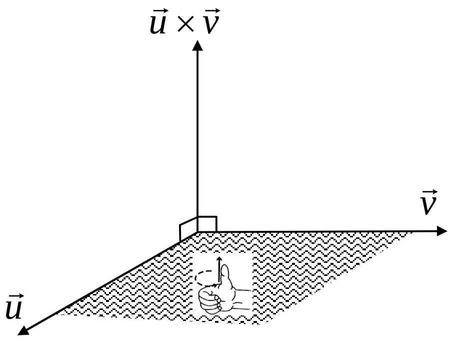
حل :

$$\vec{u}\times\vec{v}=(\begin{vmatrix}۲ & -۳\\ -۶ & ۹\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۳ & ۱\\ ۹ & -۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ -۳ & -۶\end{vmatrix})=(۱۸-۱۸,۹-۹,-۶+۶)=(۰,۰,۰)=\vec{o}$$

$$\rightarrow \vec{u}\parallel\vec{v}$$

***

نتیجه : اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار ناموازی و غیر صفر باشند، در این صورت $\vec{u}\times\vec{v}$ نیز غیر صفر بوده و هم بر $\vec{u}$ و هم بر $\vec{v}$ عمود است و لذا بر صفحه‌ی شامل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ عمود خواهد بود.



به کمک دست راست اگر انگشتان دست از طرف $\vec{u}$ به طرف $\vec{v}$ باشند، انگشت شست در جهت $\vec{u}\times\vec{v}$ قرار می گیرد. (قاعده‌ی دست راست)

***

تمرین۱۱ : برداری پیدا کنید که بر هر دو بردار $\vec{u}=(۴,-۱,۳)$ و $\vec{v}=(۲,۳,-۱)$ عمود باشد.

حل: کافی است که یکی از دو بردار $\vec{u}\times\vec{v}$ یا $\vec{v}\times\vec{u}$ را تعیین کنیم.

$$\vec{u}\times\vec{v}=(\begin{vmatrix}-۱ & ۳\\ ۳ & -۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۳ & ۴\\ -۱ & ۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۴ & -۱\\ ۲ & ۳\end{vmatrix})=(-۸,۱۰,۱۴)$$

$$\vec{v}\times\vec{u}=(\begin{vmatrix}۳ & -۱\\ -۱ & ۳\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۳\\ ۴ & -۱\end{vmatrix})=(۸,-۱۰,-۱۴)$$

***

تمرین۱۲: برداری به طول واحد بیابید که بر بردار های $\vec{u}=(۱,۲,۲)$ و $\vec{v}=(-۱,۲,-۲)$ عمود باشد.

حل :

$$\vec{u}\times\vec{v}=(\begin{vmatrix}۲ & ۲\\ ۲ & -۲\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ -۲ & -۱\end{vmatrix},\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & ۲\end{vmatrix})=(-۸,۰,۴)\to\begin{cases}(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{u}\\ (\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{v}\end{cases}$$

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{(-۸)^۲+(۰)^۲+(۴)^۲}=\sqrt{۶۴+۰+۱۶}=\sqrt{۸۰}=۴\sqrt{۵}$$

$$e_{(\vec{u}\times\vec{v})}=\frac{۱}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|}(\vec{u}\times\vec{v})=\frac{۱}{۴\sqrt{۵}}(-۸,۰,۴)=(\frac{-۲}{\sqrt{۵}},۰,\frac{۱}{\sqrt{۵}})$$

***

اندازه‌ی بردار حاصل ضرب خارجی

برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{v}$ و $\vec{u}$ که زاویه‌ی بین آنها θ (کوچکترین زاویه‌ی بین آنها) است.داریم:

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta$$

تمرین۱۳ : اگر $\|\vec{u}\|=۱۰$ و $\|\vec{v}\|=۶$ و زاویه‌ی بین دو بردار ۳۰ درجه باشد. اندازه‌ی بردار ضرب خارجی این دو بردار را محاسبه کنید.

حل :

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta=۱۰\times۶\times\sin۳۰=۱۰\times۶\times\frac{۱}{۲}=۳۰$$

***

پایان